Viele Wege führen über den Zehner!

Einige Anregungen zur Behandlung von Aufgaben mit Zehnerübergang im ersten Schuljahr

Autor: Michael Gaidoschik, 2012

1 Einleitung

Additionen und Subtraktionen mit Zehnerübergang (z.B. 7+8, 15-7) werden in Österreich üblicher Weise im zweiten Halbjahr des ersten Schuljahres erarbeitet. In vielen heimischen Schulbüchern wird als Rechenstrategie für solche Aufgaben das sogenannte „Teilschrittverfahren“ mit „Zehnerstopp“ alternativlos vorgeschrieben („Rechne so!“).

Für die Lösung beispielsweise der Aufgabe 7 + 8 wird also in vielen Büchern als einziger Lösungsweg der folgende vorgegeben:

1. Schritt: 7 + 3 = 10 (dabei mitgedacht: 8 = 3 + 5)
2. Schritt: 10 + 5 = 15

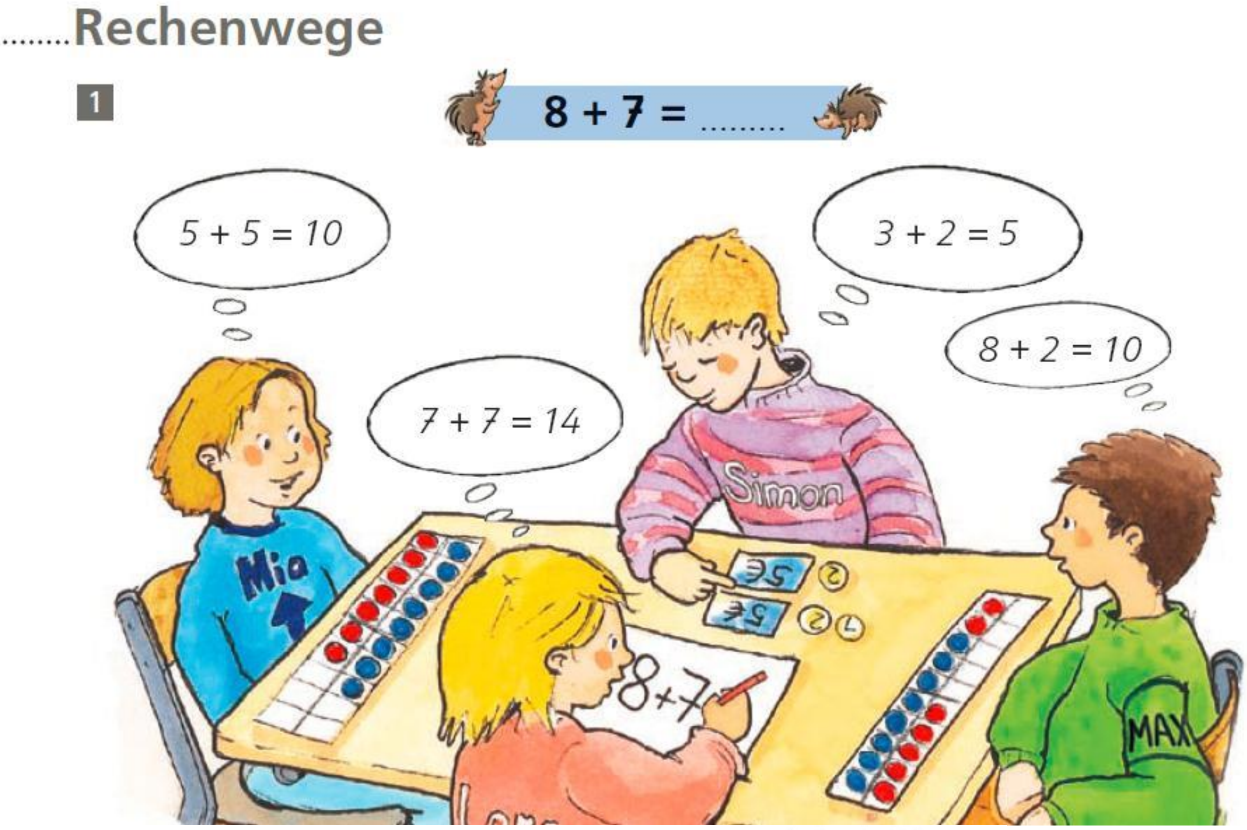
Andere, mathematisch gleichfalls richtige Strategien zur Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben kommen in den meisten derzeit verwendeten Schulbüchern entweder gar nicht vor oder werden erst zu einem sehr viel späteren Zeitpunkt nachgereicht.

Von dieser Art, Aufgaben mit Zehnerüber- und –unterschreitung im Unterricht zu behandeln, wird im folgenden Beitrag ganz entschieden abgeraten.
Für diese Ablehnung des „traditionellen“ Weges gibt es eine Reihe von handfesten, empi-risch gut untermauerten Gründen, die in Punkt 5 ausgeführt werden. Zuvor soll aber die Alternative deutlich gemacht werden. Es folgen also in Punkt 2 bis 4 einige knapp gehaltene, teils stichwortartig ausgeführte Empfehlungen zur Gestaltung des Unterrichts, die in abgewandelter Form aber ebenso als Anregung für die Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zu verstehen sind.

2 Der Einstieg: Eine Aufgabe mit Zehnerübergang stellen, Material zur Bearbeitung anbieten – und die Kinder selbst eine geschickte Strategie suchen lassen!

Zur Illustration der folgenden Empfehlungen sei hier zunächst ein Teil der Seite zur Erarbeitung des Zehnerübergangs aus dem „Zahlenbuch 1“ wiedergegeben (Wittmann & Müller, erstmals veröffentlicht 1994, hier aus der Österreich-Ausgabe von 2010, öbv-Klett; mit freundlicher Genehmigung des Verlags). (Für eine umfassendere Darstellung der weitgehenden Übereinstimmung der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik bezüglich der Behandlung des Zehnerübergangs im Unterricht vgl. Gaidoschik 2010, S. 225f.)

Wie ersichtlich, wird im Zahlenbuch 1 vorgeschlagen, den Kindern nicht nur eine Strategie zur Bewältigung von Aufgaben mit Zehnerübergang vorzugeben, sondern im Unterricht eine Reihe von Möglichkeiten zu behandeln; Möglichkeiten dafür, wie man ohne zu zählen über den Zehner rechnen kann. Das Zehnerstopp-Verfahren ist eine dieser Möglichkeiten (Max rechnet so), aber eben nur eine, nicht die einzige…



Wittmann, Erich Ch., Müller, Gerhard N., Das Zahlenbuch 1, Schülerbuch, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2010, ISBN 978-3-209-06699-2, S. 54

Wie könnte die Umsetzung dieses Konzepts für einen EINSTIEG in die Behandlung des Zehnerübergangs im Unterricht konkret aussehen? Aus meiner Sicht ist dabei das Folgende zu beachten:

- Egal, welches Schulbuch Sie verwenden: Führen Sie Aufgaben mit Zehnerübergang zu-nächst besser ohne Schulbuch ein: Konfrontieren Sie die Kinder einfach zum gegebenen Zeitpunkt mit einer Aufgabe, die einen Zehnerübergang erfordert (zu dem, was zuvor alles erarbeitet worden sein sollte, siehe weiter unten!). Geben Sie ihnen dafür zunächst KEINE STRATEGIE VOR!
- Geben Sie den Kindern vielmehr einen klaren Auftrag: „Versucht selbst, einen Weg zu finden, wie man diese Aufgabe lösen kann! Versucht aber einen Weg zu finden, bei dem man nicht mühsam zählen muss!"
- Bieten Sie als vorerst einzige Hilfestellung strukturiertes Material an (Näheres folgt!).
- Die Kinder sollen zunächst einzeln für sich probieren, dann eventuell in Zweier-Gruppen diskutieren.
- Dann eine „Rechenkonferenz": Kinder im Sitzkreis erläutern einander ihre Strategien.
- Bei Bedarf: Die Lehrkraft ergänzt um weitere, vorteilhafte Strategie(n). (Vielleicht wur-den aber alle sinnvollen Strategien von Kindern der Klasse entdeckt?)
- Im Zuge der Rechenkonferenz: Kinder anregen, die Strategien zu vergleichen. „Verstehst du, wie Jasmin gerechnet hat?" „Verstehst du, wie Lukas gerechnet hat?"…; Diskussion über Vor-

und Nachteile einzelner Strategien, dabei in jedem Fall Anerkennung für die jeweilige Strategie-Entdeckung…
- Dann weitere Aufgaben mit Zehnerübergang geben. (Die Erarbeitung ist natürlich nicht in einer Schulstunde erledigt, das Üben schon gar nicht!) In dieser Phase könnte dann auch die oben wiedergegebene Zahlenbuch-Seite mit den Kindern besprochen werden.
- Kinder, die für sich bereits nicht-zählende Strategien gefunden haben, in dieser ersten Phase darin bestärken, ihre Strategien auch an den weiteren Aufgaben zu erproben – oder auch Strategien anderer Kinder auszuprobieren!
- Kindern, die von sich aus zunächst noch keine nicht-zählenden Strategien finden (also Aufgaben dieser Art zählend lösen), gezielte Anregungen geben, es in der einen oder anderen Weise zu versuchen (siehe dazu weiter unten unter 3).

Zur Bedeutung von „Rechenkonferenzen“, speziell für den Zehnerübergang

- Viele Kinder entwickeln von sich aus tragfähige, nicht-zählende Strategien für den Zehnerübergang.
- Auch für diese Kinder sind aber die „Rechenkonferenzen“ hilfreich zum Reflektieren und Festigen ihrer Rechenwege. Vielleicht finden sie auf diese Weise auch noch effizientere, ökonomischere Strategien. Sie verbessern in jedem Fall ihre Kompetenz im mathematischen „Kommunizieren“, einer der vier in den Bildungsstandards angestrebten „allgemeinen Kompetenzen“!
- Anderen Kindern erleichtert das Vorbild der anderen, sich vom zählenden Rechnen zu lösen (und auch diese Kinder entwickeln dabei die Kompetenz zu kommunizieren!)
- Wieder andere benötigen aber noch gezieltere Unterstützung. Man darf also nicht erwarten, dass alleine durch Rechenkonferenzen alle Kinder einer Klasse nicht-zählende Strategien für den Zehnerübergang erwerben! Der oben skizzierte Vorschlag zur ersten Behandlung von Aufgaben mit Zehnerübergang im Unterricht ist also für viele Kinder eben wirklich nur der Einstieg in ein neues, anspruchsvolles Thema; gezielte Maßnahmen zur Erarbeitung müssen folgen (siehe Punkt 3 und 4). Um zu wissen, welche und wie viele Kinder das betrifft, muss die Lehrkraft aber die Rechenwege der Kinder möglichst individuell kennen. Die Rechenkonferenz hat also auch immer dieses Ziel: eine möglichst individuelle Erfassung des Lernstands der einzelnen Kinder einer Klasse zu liefern!

3 Einige Anregungen im Detail zu einzelnen Strategien für den Zehnerübergang

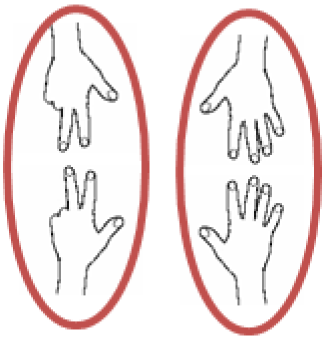
Um ein mögliches Missverständnis zu vermeiden: Es geht nicht darum, dass sich jedes Kind jede der Strategien, zu denen im Folgenden einige kurze Erarbeitungshinweise gegeben werden, dauerhaft aneignet. Die Lehrkraft sollte, nach dem oben skizzierten Einstieg, die Kinder bei weiteren Aufgaben mit Zehnerübergang möglichst individuell beobachten. Sie sollte jene Kinder bestärken, die von sich aus nicht-zählende Wege finden. Sie sollte aber jenen Kindern, die das nicht tun und, auch sehr konkrete Anregungen geben. Welche Anregungen könnten dies sein?

3.1 Zehnerübergang mit der „Kraft der Fünf“

Gerade für Kinder mit Automatisierungs-Defiziten im Zahlenraum bis 10 ist die Strategie, die auf der oben wiedergegebenen Zahlenbuch-Seite von Mia und Simon gewählt wird, oft viel überzeugender und wird daher von diesen Kindern mit größerer Wahrscheinlichkeit schon im ersten Schuljahr angenommen: das sogenannte Rechnen mit der „Kraft der Fünf“ (vgl. Krauthausen 1995).

Dargestellt an der Verdoppelungsaufgabe 8 + 8: Kinder, die von sich aus keinen nicht-zählenden Weg für diese Aufgabe finden, können aufgefordert werden, in Partnerarbeit jeweils 8 Finger auszustrecken; dann zu überlegen, wie man, ohne zu zählen, draufkommen könnte, wie viele Finger das nun insgesamt sind.

Als Strategie ergibt sich für viele Kinder „wie von selbst", dass sie zunächst die beiden „vollen Hände", also 5+5 zusammenrechnen, dann 3+3. Beide Verdoppelungsaufgaben sollten zu diesem Zeitpunkt bereits automatisiert sein. Nun müssen die Kinder freilich noch 10+6=16 wissen; ist dies nicht der Fall, dann heißt es: am Verständnis zweistelliger Zahlen als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern (bzw. der Zahlen von 11 bis 19 als Zusammensetzung aus 10 + …) zu arbeiten.

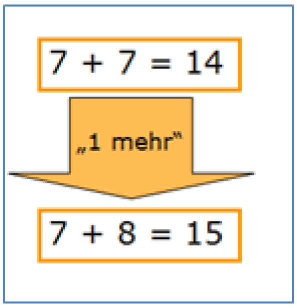


Die Strategie „Kraft der Fünf" bietet sich insbesondere für die Verdoppelungen von 6+6 bis 9+9 an und sollte zunächst an diesen Aufgaben durchgespielt werden; zunächst noch ohne Aufschreiben. In weiterer Folge wird es sinnvoll sein, parallel zur (oder unmittelbar nach der) Durchführung mit Händen eine schriftliche Form zu finden, in der sich die Handlung widerspiegelt.

(Wie viel davon wirklich vom Kind aufgeschrieben wird; ob zusätzlich auch noch die Zwischenresultate 10 und 6 aufgeschrieben werden; das sollte möglichst individuell mit dem Kind abgeklärt werden. Manche Kinder werden durch zu viel Schriftliches eher verwirrt bzw. vom Denken abgelenkt, für andere ist es ein wichtiger Halt…).

Die Strategie „Kraft der Fünf" eignet sich grundsätzlich für alle Aufgabe, bei denen beide Summanden größer/gleich 5 sind (also für fast alle Aufgaben mit Zehnerübergang; ausgenommen sind 7+4, 8+4, 8+3, 9+4, 9+3, 9+2 und deren Tauschaufgaben):

3.2 Zehnerübergang durch „Verdoppeln plus eins" / „Verdoppeln minus eins"

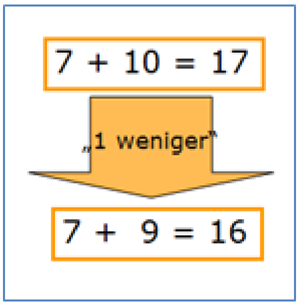


Vieles spricht dafür, gezielt daran zu arbeiten, dass die Verdoppelungen auch von 6+6 bis 9+9 (wie zuvor schon die Verdoppelungen 2+2 bis 5+5) möglichst bald von möglichst allen Kindern automatisiert werden. Die Strategie „Kraft der Fünf" kann ein guter Einstieg in das nachfolgende Automatisieren gerade der Verdoppelungsaufgaben sein; Näheres zum Automatisieren siehe etwa bei Gaidoschik 2007.

Wenn Kinder aber die Verdoppelungen 6+6 bis 9+9 automatisiert haben, bietet sich als Strategie für viele Aufgaben mit Zehnerübergang „Verdoppeln plus eins" bzw. „Verdoppeln minus eins" an, eventuell auch „Verdoppeln plus zwei" bzw. „Verdoppeln minus zwei". Auf der oben wiedergegebenen Zahlenbuchseite ist das die Strategie von Lara: Sie denkt bei 7+8 an 7+7, weil sie 7+7 eben schon auswendig weiß: 14. 7+8 muss dann 15 sein, „um 1 mehr".

Zum Materialeinsatz bei der Erarbeitung dieser Strategie siehe unten unter 4.

3.3 Zehnerübergang mit der „Kraft der Zehn" („Zehnertrick")



In analoger Weise lassen sich Additionen mit dem Summanden 9 (eventuell auch mit dem Summanden 8) aus Additionen mit dem Summanden 10 ableiten: Ein Kind, dass 7+10 als „leicht“ empfindet und sofort „17“ als Ergebnis weiß, wird vielleicht von selbst (oder mit ein wenig Anleitung; siehe dazu weiter unten) draufkommen, dass dies für die Lösung von 7+9 hilft (7+9 ist nur um 1 weniger als 7+10).

Details zur Erarbeitung folgen im Kapitel zum Materialeinsatz.

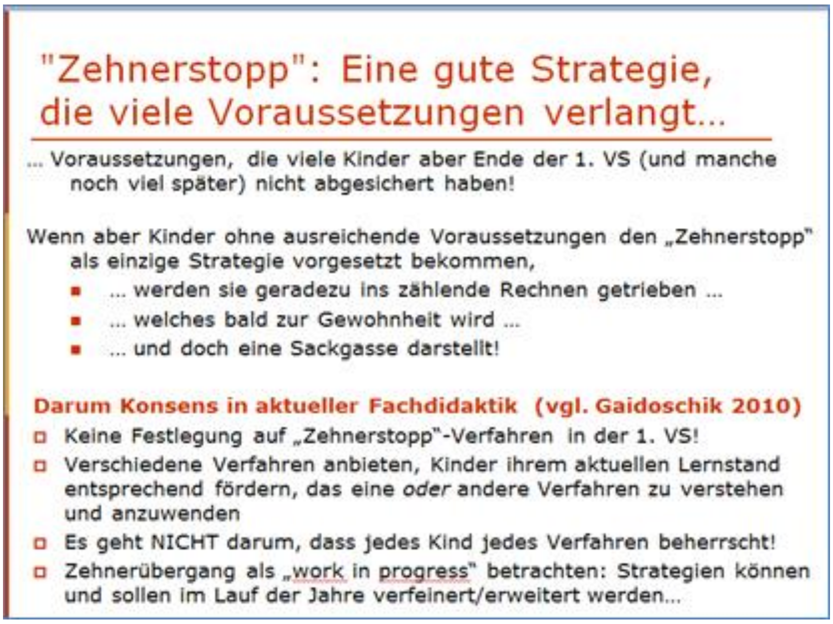
3.4 Zehnerübergang mit dem „Teilschrittverfahren“ („Zehnerstopp“)

Natürlich ist auch das (den meisten Erwachsenen vertraute) Zehnerstopp-Verfahren eine großartige Strategie, um Aufgaben mit Zehnerübergang nicht-zählend zu lösen. Ehe man Kindern das Zehnerstopp-Verfahren zu vermitteln versucht, sollte man aber überprüft haben, ob diese Kinder auch über alle Voraussetzungen verfügen, die man braucht, um das Rechnen mit Zehnerstopp als Universalverfahren attraktiv zu finden (also nicht nur bei dafür besonders günstig geeigneten Aufgaben wie 5+6 oder 5+8, wo es mit der Strategie „Kraft der Fünf“ zusammenfällt). Wenn aber Kinder eine Strategie nicht selbst als attraktiv empfinden, wenn sie nicht einen Vorteil dabei verspüren, wenn sie so rechnen, dann werden sie in aller Regel auch nicht so rechnen!

Was sind nun die Voraussetzungen, die man für das Zehnerstoppverfahren benötigt?

- Das Ergänzen bis 10, von jeder Zahl bis 9 ausgehend, muss vollständig automatisiert sein.
- Das Zerlegen aller Zahlen bis 9 muss in allen Varianten automatisiert sein. Das Kind sollte zu jeder Zahl, wenn eine Teilportion gegeben ist, den anderen Teil automatisch mitdenken
- Rechnungen wie 10 + 3, der letzte Teilschritt der Gesamtrechnung, muss als „babyleicht“ empfunden werden.
- Der Sinn des ersten Schrittes – Warum rechnen wir denn ausgerechnet bis 10? – muss dem Kind klar sein. Das ist für Kinder am Ende des ersten Schuljahres ganz und gar nicht trivial, weil sie oft noch nicht in Zehnern und Einern denken (siehe Gaidoschik 2010).
- Der komplexe Ablauf all dieser Rechenschritte muss vom Kind überblickt werden, es darf nicht „den Faden“ verlieren.

Daher noch einmal als Warnung, zusammengefasst:



Wenn nun aber Kinder die nötigen Voraussetzungen haben, spricht vieles dafür, auch das Zehnerstopp-Verfahren gezielt im Unterricht zu erarbeiten.

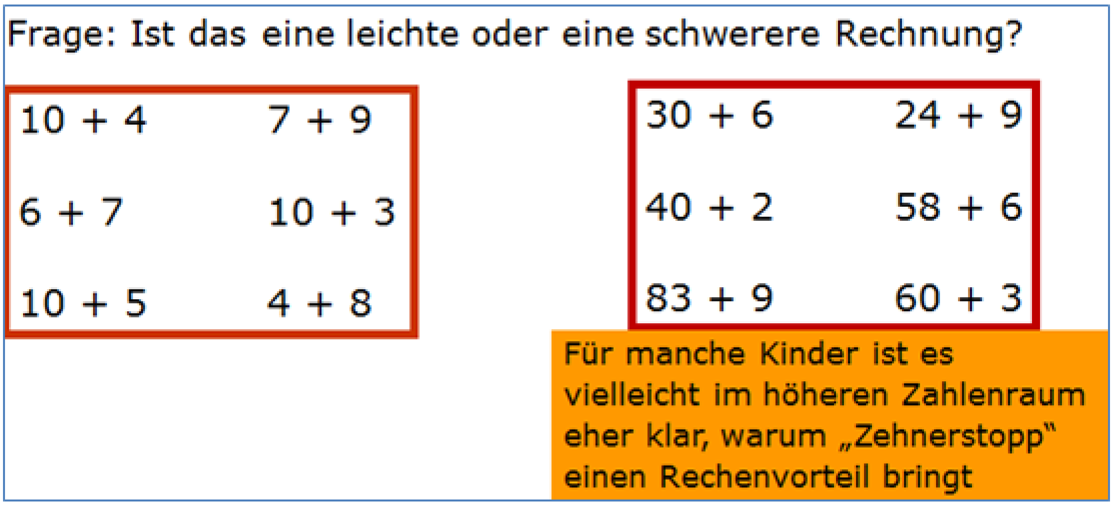
Wesentliche Argumente für die Zehnerstopp-Strategie:

Sie ist als einzige nicht-zählende Strategie für Aufgaben mit Zehnerübergang universell einsetzbar, unabhängig von den besonderen Zahlen.

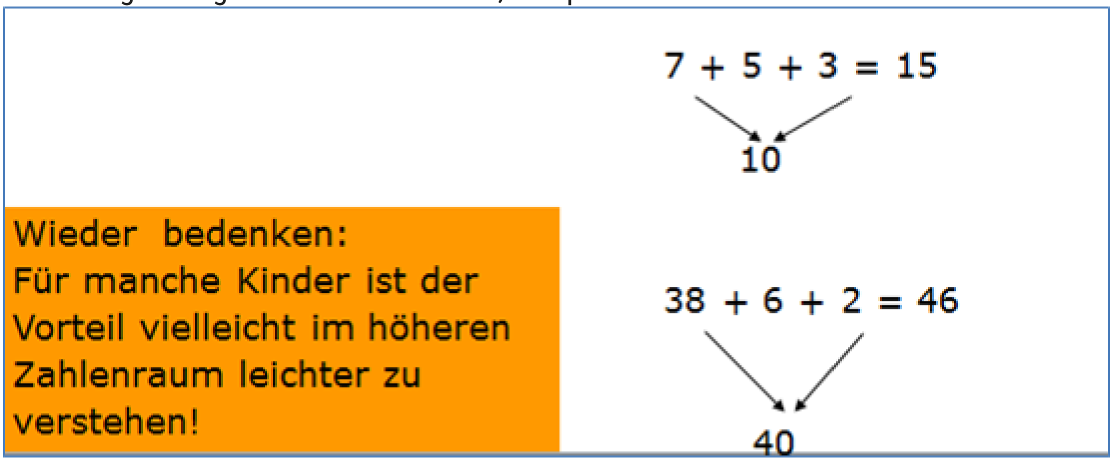
- Jede der bislang genannten Strategien lässt sich analog auch in höheren Zahlenräumen anwenden (dafür sorgt unser Stellenwertsystem!). Das Teilschrittverfahren ist aber (wenn es beherrscht wird!) vermutlich besser als andere Verfahren auch für das Kopfrechnen in höheren Zahlenräumen geeignet. Denn beim Teilschrittverfahren wird die Ausgangszahl als Ganzes genommen und Schritt für Schritt weiterverarbeitet. Die Ausgangszahl muss also nicht bis zum Abschluss aller Schritte im Arbeitsgedächtnis gespeichert werden. Werden hingegen etwa später beim Addieren zweier zweistelliger Zahlen mit Zehnerübergang zuerst die Zehner zu den Zehnern, dann die Einer zu Einern addiert (und dabei etwa die Strategie „Kraft der Fünf" angewandt), dann ist das zwar „halbschriftlich" (mit Aufschreiben von Zwischenschritten und / oder Zwischenergebnissen) eine taugliche Strategie. Es stellt aber als Kopfrechenstrategie höher Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis als ein schrittweises Vorgehen (ZE + Z, dann + E mit Zehnerstopp).

Die Zehnerstopp-Strategie „gezielt erarbeiten" heißt unter anderem:

- Zunächst muss an der Einsicht gearbeitet werden: Warum ist es denn (vielleicht) überhaupt von Vorteil, im ersten Schritt ausgerechnet bis 10 zu rechnen?
- Zu diesem Zweck den Kindern Rechnungen (etwa jeweils einzeln auf Kärtchen geschrieben) zum Sortieren vorlegen: Welche dieser Rechnungen ist leicht, welche zumindest nicht ganz so leicht? Beispiel:



- In der „Rechenkonferenz" auf Klärung hinarbeiten, was 10+3 oder 10+5 zu einer leichten Rechnung macht: Man muss eigentlich nicht rechnen, sondern nur eine zweistellige Zahl aus ihren Bestandteilen zusammenbauen.
- Weitere wichtige vorbereitende Übung, wenn Kindern das Obige klar geworden ist: Rechnungen vorlegen, die durch Anwendung des Vertauschungsgesetzes zu einfachen Rechnungen umgebaut werden können, Beispiel:



- Kinder sollen bei solchen Aufgaben lernen: Es bringt für mich etwas, wenn ich den Zehner als Zwischenstation nutze!

In weiterer Folge ist zu bedenken:

- Nicht jeder Zehnerübergang ist aus Sicht eines Kindes mit Zehnerstopp gleich leicht/ gleich schwer bzw. in gleicher Weise einsichtig.
- Daher: Wenn Zehnerstopp das Ziel ist, dann sollten die Aufgaben zum Einstieg sorgfältig ausgewählt werden!
- Weder zu leichte, noch zu schwere Aufgaben!
- „Zu leicht" wäre z.B. 9 + 2; hier ist der Unterschied zum Weiterzählen kaum als Vorteil zu erkennen!
- „Zu schwer" wäre eine Aufgabe, bei der das Kind sich mit den Teilschritten (Ergänzen auf 10, Zerlegen der zweiten Zahl) noch plagt.
- Daher ideal, um den Zehnerstopp schmackhaft zu machen: Aufgaben wie 5+8, 5+7, 5+9, weil hier sowohl das Ergänzen auf 10, als auch das Zerlegen („Kraft der Fünf!") leicht fallen wird.
- In weiterer Folge vielleicht Aufgaben, bei denen gleichfalls die Zerlegung mit der Kraft der Fünf gefragt ist, aber mit „Umstellung der Teilportionen", also z.B. 6+9 = 6+4+5 (4+5 ist die von den Handzerlegungen vielleicht vertrauteste Zerlegung der Zahl 9).
- Ebenso ist es für viele Kinder naheliegend, dann einen Zehnerstopp zu machen, wenn die zweite Zahl dafür in Hälften zerlegt wird, wie etwa bei 6+8 als 6+4+4.

- Wenn an diesen „attraktiven Aufgaben“ ein Grundverständnis für das Vorteilhafte des Zehnerstopps klar geworden ist, sind die Chancen gewachsen, dass ein Kind diese Strategie auch bei beliebigen Aufgaben versucht.

4 Einige Hinweise zum Einsatz von Material bei der Erarbeitung des Zehnerübergangs

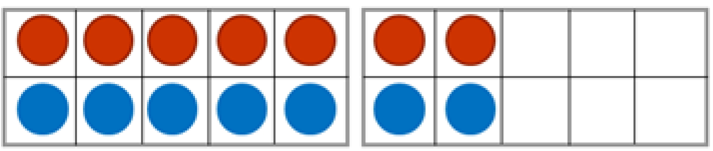
4.1 Allgemeine Überlegungen zum Materialeinsatz

- Zu bedenken ist: Unser Ziel ist, dass Kinder nicht-zählende Strategien über den Zehner finden. Jedes Material kann aber von Kindern immer auch nur als Zählhilfe gebraucht (aus unserer Sicht: „missbraucht“) werden.
- Deshalb erstens Notwendigkeit des Materialeinsatzes prüfen! Nicht jedes Kind braucht für jeden Lernschritt Material; und Material kann auch zum Zählen verführen.
- Bestimmte Materialien sind grundsätzlich ungeeignet, um nicht-zählende Strategien zu erarbeiten. Dazu gehören alle unstrukturierten Materialien (Plättchen ohne Zehnerfeld, Kastanien, beliebiges Zählmaterial), aber auch der durchnummerierte Zahlenstrahl, der für manche Kindern nichts anderes darstellt als eine Einladung zum „Drüberzählen“
- Grundsätzlich brauchbares Material für die Erarbeitung nicht-zählender Strategien über und unter den Zehner weist eine Zehner- und Fünferstruktur auf; das sind Rechenschiffchen, die gute alte Eierschachtel, das 20er-Feld, der 20er-Rechenrahmen mit je fünf Kugeln in einer Farbe – und bei geeigneter Verwendung (siehe unten!) durchaus auch die Hände!
- Entscheidend für das Weitere ist aber, wie stets im Arithmetikunterricht, nicht das Material selbst, sondern: Welche Handlungen werden mit dem Material angeregt, wie werden diese Handlungen in weiterer Folge in der Kommunikation mit den Kindern und unter den Kindern aufgegriffen?
- Generell gilt: Material sollte bei der Erarbeitung des Zehnerübergangs nicht als Hilfsmittel zur Findung einer Lösung betrachtet werden (auch den Kindern nicht als solches nahegelegt werden). Wenn es nur darum gehen würde, was z.B. bei 7+8 herauskommt, können wir Kindern gleich einen Taschenrechner in die Hand drücken. Wir wollen mit dem Material etwas anderes erreichen: Kinder sollen Strategien lernen, die sie auch ohne Material, im Kopf, durchführen können. Das Material hilft dann dabei, wenn es für das Kind zu einer Vorstellungshilfe für die Schrittfolge einer nicht-zählenden Strategie wird.

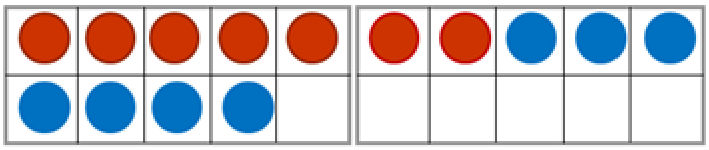
4.2 Sinnvoller Einsatz von 20er-Feld/Eierkartons/Rechenschiffchen…

Was bedeuten oben stehende allgemeine Überlegungen in der konkreten Umsetzung? Am Beispiel der Aufgabe 7+7 skizziert:

- Sie könnten Kinder dazu auffordern, die Aufgabe 7+7 mit roten und blauen Wendeplättchen im 20er-Feld zu legen, aber mit der Vorgabe: „Versucht die Plättchen so zu legen, dass man ohne zu zählen ablesen kann, wie viele es insgesamt sind!“
- Diese Vorgabe kann nun ganz unterschiedlich erfüllt werden; in allen im Folgenden abgebildeten Varianten lässt sich die Gesamtzahl der Plättchen nicht-zählend ermitteln.



Von manchen Kindern vielleicht in dieser Weise gelegt!

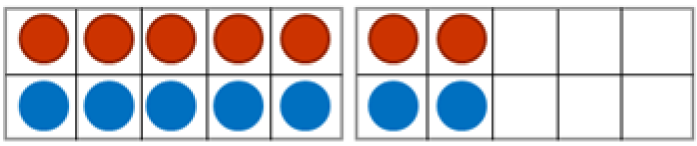


Von manchen Kindern vielleicht in dieser Weise gelegt!

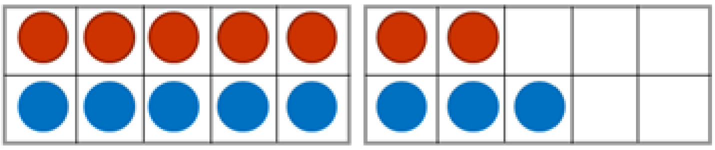
- Haben Kinder die Aufgabe in der einen oder anderen Weise gelegt, dann sollten Sie von ihnen einfordern, dass sie nun auch tatsächlich Ihnen und den anderen Kindern erläutern, auf welche Weise sie hier die Gesamtzahl „sehen", ohne dabei zählen zu müssen. Das führt zu einer der oben ausgeführten Strategien: „Ich sehe 5+5, 2+2, macht 14" oder aber „Ich sehe 7+3, noch 4, macht 14."
- Diese Strategie sollten Kinder dann bei weiteren Aufgaben anzuwenden versuchen, früher oder später aber auch, ohne die Plättchen selbst zu legen: Sie sollen vielmehr versuchen, ihrem Sitznachbarn/ihrer Sitznachbarin zu sagen, auf welche Weise er/sie die Plättchen in das Zwanzigerfeld legen soll. Anfangs hat das Kind, das die „Befehle" zum Legen der Plättchen gibt, freie Sicht auf das Zwanzigerfeld; später dann wird eine Sichtbarriere aufgebaut (oder mit verbundenen Augen gearbeitet; vgl. Schipper 2009).
- Das Kind sollte dann also z.B. bei 6+8 sagen: „Oben 6, lege 5+1; unten 8, lege 5+3; das Ergebnis ist leicht zu sehen: 5 oben, 5 unten macht 10; 1 oben, 3 unten macht 4, also 14." Als Entlastung für das Kurzzeitgedächtnis sollte das Kind natürlich auch schriftliche Notizen machen können, so wie das oben für diese Strategie gezeigt wurde.
- Wenn aber ein Kind sich für die Strategie „Zehnerstopp" („Zehner voll machen") ent-schieden hat, dann könnte die Anweisung an das Nachbarkind so lauten: „Zuerst oben 6 rote legen. Dann noch 4 blaue oben dazu, macht 10 voll. Dann unten noch die restlichen 4, ergibt 14." Auch hier schriftliche Notizen sinnvoll, weil sonst leicht Überforderung des Arbeitsgedächtnisses droht.
- Erst wenn eine Strategie mehr und mehr selbstverständlich geworden ist, ist es sinnvoll, Kinder auch zu ermutigen, es „ganz im Kopf", ohne schriftliche Notizen, zu versuchen; aber ohne Druck zu machen: Wenn das einem Kind schwer fällt, sollte überprüft werden, woran es liegt (allgemeines Problem in der Aufmerksamkeit/im Bereich des Arbeitsgedächtnisses? Teilschritte zu wenig automatisiert?). Wenn nötig, an den Teilschritten arbeiten!

Auch für die Erarbeitung der Strategie „Verdoppeln plus ein" (siehe oben unter 1.3.2) sind Rechenschiffchen, Zwanzigerfeld, Eierschachteln… gut geeignet; auch hier kommt es aber entscheidend darauf an, welche Handlungen mit diesem Material angeregt werden. Dazu in aller Kürze (Näheres bei Gaidoschik 2007):

Lege 7 + 7 mit zwei Farben!
Lege so, dass man auf einen Blick sehen kann, wie viel das ist!



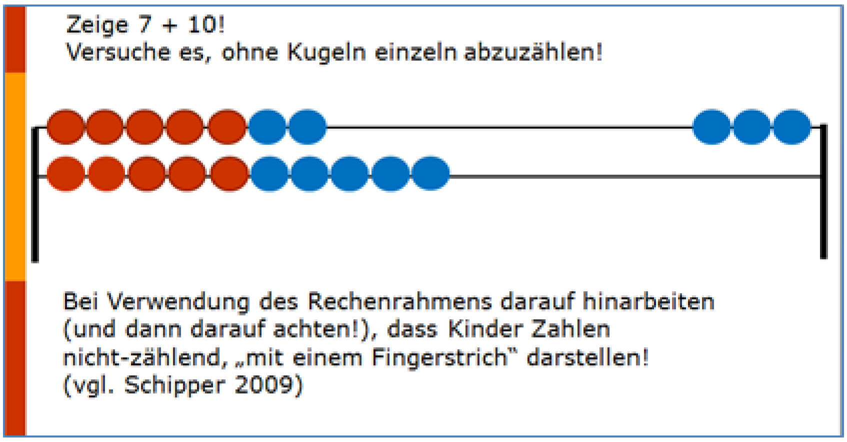
Kannst du daraus 7+8 machen?

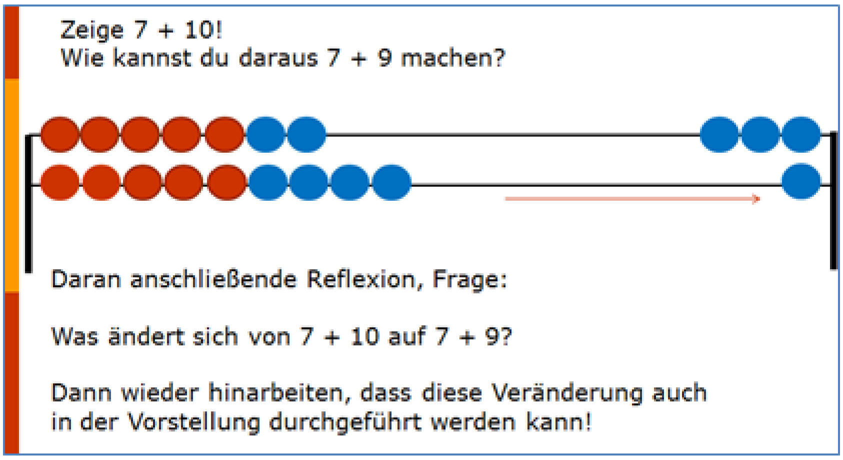


Was hat sich geändert?
Was hat 7+7 und 7+8 miteinander zu tun? ...

4.3 Sinnvoller Einsatz des 20er-Rechenrahmens

Wilhelm Schipper favorisiert für die Erarbeitung des Zehnerübergangs den Einsatz des 20er-Rechenrahmens. Dazu in aller Kürze (Näheres bei Schipper 2009):

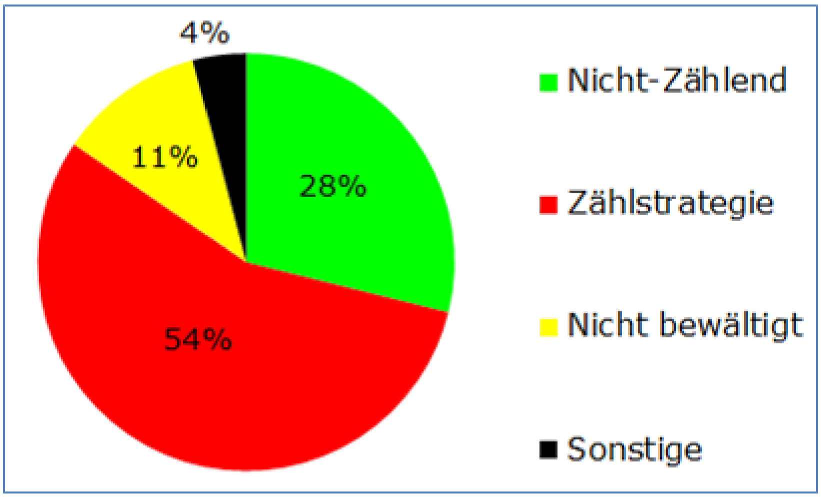




5 Probleme bei der traditionellen Behandlung des „Zehnerübergangs"

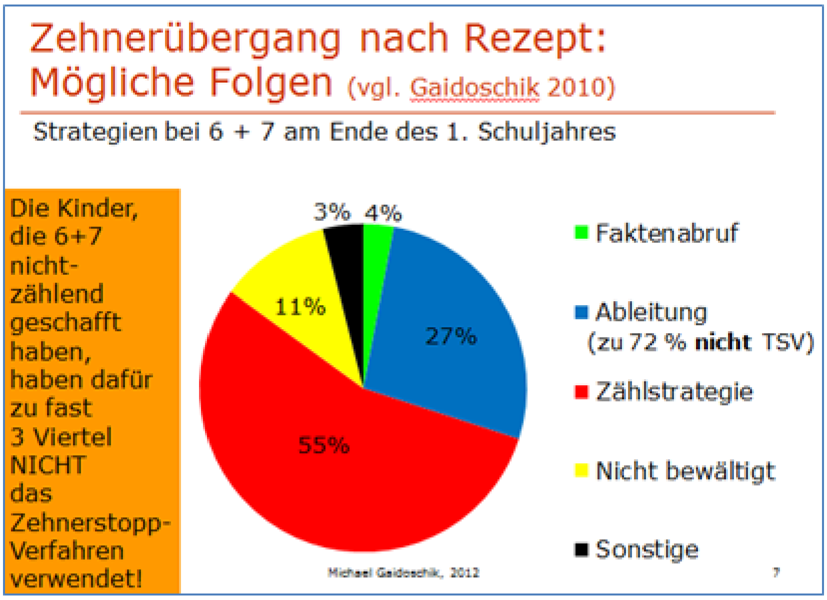
Zum „Teilschrittverfahren" mit „Zehnerstopp" hält Krauthausen schon 1995 fest, dass es, „was die erforderlichen Teilleistungen betrifft, das anspruchsvollste" Verfahren für die Zehnerüberschreitung sei. Er berichtet im selben Aufsatz von den „Klagen" vieler Lehrer/innen darüber, „welche Schwierigkeiten Kinder damit [dem Teilschrittverfahren] hätten", und hält dazu fest: „Teilweise handelt es sich dabei um ‚hausgemachte' Probleme – insbesondere dann, wenn die Kinder auf ein Verfahren festgelegt werden" (Krauthausen 1995, S. 87f.)

In einer eigenen empirischen Studie (Gaidoschik 2010) habe ich eine Zufallsauswahl von 139 Kindern (NÖ) unter anderem zu ihren Strategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang interviewt. Im Unterricht dieser Kinder wurde (im Einklang mit den verwendeten Schulbüchern, s.o.) für solche Aufgaben ausschließlich das Teilschrittverfahren mit Zehnerstopp behandelt. Am Ende des ersten Schuljahres zeigte sich bei den interviewten Kindern die folgende Strategieverteilung (bei insgesamt 7 Aufgaben mit Zehnerübergang):



Nur etwa 28 % der Kinder dieser Stichprobe bewältigten solche Aufgaben also nicht-zählend. Mehr als die Hälfte griff zu Zählstrategien, weitere 11 % zeigten sich bei solchen Aufgaben gänzlich überfordert.

Jene Kinder aber, die nicht-zählend über den Zehner rechneten, wählten dafür keineswegs nur das Zehnerstopp-Verfahren (also jenes Verfahren, das sie im Unterricht kennen gelernt hatten). So rechneten etwa 72 % der Kinder, die 6+7 nicht-zählend bewältigten, diese Aufgabe mit der Strategie „Verdoppeln plus 1" bzw. „Verdoppeln minus 1" (also 6+6=12, deshalb 6+7=13 bzw. 7+7=14, deshalb 7+8=15). Bei der Aufgabe 8+8 rechnete überhaupt nur 1 (ein!) Kind von 139 im Zehnerstoppverfahren (8+2+6), dafür aber etwa zwei Kinder mit dem Verfahren „Kraft der Fünf" (8+8=5+5+3+3, 5+5=10, 3+3=6, deshalb 8+8=16), welches im Unterricht NICHT behandelt worden war.



Fazit:

- Wenn im Unterricht des ersten Schuljahres für Aufgaben mit Zehnerübergang alternativlos das Rezept „Achtung: Zuerst bis 10…!" ausgegeben wird, führt das offenbar nicht dazu, dass alle Kinder später auch tatsächlich so rechnen!
- Eher scheint es so: Manche Kinder entdecken auch unabhängig vom Unterricht (trotz des Unterrichts?) für sich effiziente Strategien für Aufgaben mit Zehnerübergang. In unserer Stichprobe war das weniger als ein Drittel der Kinder; und die Stichprobe kann wohl für

Österreich als durchaus repräsentativ gelten (vgl. Gaidoschik 2010). Diese „rechenstarken“ Kinder wählen aus den unterschiedlichen Strategien durchaus geschickt je nach Aufgabe aus und rechnen manche Aufgaben mit Zehnerstopp, andere Aufgaben mit anderen Strategien (indem sie z.B. bei 6+7 an 6+6 denken, aber NICHT 6+4+3 rechnen!).
- Viele Kinder (in unserer Stichprobe mehr als die Hälfte!) scheinen mit dem Zehnerstopp-Verfahren am Ende des ersten Schuljahres überfordert. Sie verstehen es nicht oder empfinden es nicht als vorteilhaft; jedenfalls: Diese Kinder sind zumindest am Ende des ersten Schuljahres „zählende Zehnerüberschreiter/innen“, und manches spricht dafür, dass das auch wegen der versuchten Festlegung auf das Zehnerstopp-Verfahren so ist: Denn Kinder müssen schon sehr viel können, damit sie das Zehnerstopp-Verfahren als Rechenvorteil empfinden können (siehe unten unter 1.3.4). Wenn sie über diese vielfältigen Voraussetzungen (noch) nicht verfügen, ihnen im Unterricht aber kein anderes, weniger voraussetzungsreiches Verfahren für Aufgaben dieses Typs angeboten wird, dann greifen eben jene Kinder, die nicht von sich aus oder durch häusliche Förderung ein anderes, weniger voraussetzungsreiches nicht-zählendes Verfahren entdecken, zu dem Verfahren, das sie in der Regel schon seit Kindergartentagen leidlich beherrschen: Sie rechnen zählend.

Zählendes Rechnen am Ende des ersten Schuljahres ist aber nichts Harmloses, nichts, was von Volksschullehrkräften einfach so hingenommen werden sollte, denn:

„Wird zählendes Rechnen verfestigt, stellt es eine Sackgasse dar, aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen.“ J.H. Lorenz / H. Radatz, 1993
Daher: Siehe die Empfehlungen in den Punkten 2 bis 4!!!

6 Literatur zum Zehnerübergang

Siehe die entsprechenden Kapitel in

GAIDOSCHIK, Michael (2007): Rechenschwäche vorbeugen – Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen.- Wien: G&G.

KRAUTHAUSEN, Günter & SCHERER, Petra (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik.- Heidelberg – Berlin: Spektrum, 2. Auflage.

PADBERG, Friedhelm & BENZ, Christiane (2011): Didaktik der Arithmetik.- Heidelberg: Spektrum.

RADATZ, Hendrik & SCHIPPER, Wilhelm, EBELING, Astrid & DRÖGE, Rotraut (1996): Hand-buch für den Mathematikunterricht, 1. Schuljahr.- Hannover: Schroedel.

SCHIPPER, Wilhelm (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.- Braunschweig: Schroedel.

WITTMANN, ERICH CH. & MÜLLER, GERHARD N. (1994): Handbuch produktiver Rechen-übungen, Band 1.- Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett, zweite, überarbeitete Auflage.

Zum theoretischen Hintergrund:

GAIDOSCHIK, Michael (2010): Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr.- Frankfurt/Main: Peter Lang.

KRAUTHAUSEN, Günter (1995): Die “Kraft der Fünf” und das denkende Rechnen.- In: MÜLLER, Gerhard N. & WITTMANN, Erich CH. (Hrsg.): Mit Kindern rechnen.- Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband e.V.: Frankfurt & Main, S. 87–108.

Aus: http://www.recheninstitut.at/