Schriftliches Dividieren, Teil II:
Anregungen für die vierte Schulstufe/Dividieren mit zweistelligem Divisor

Autor: Michael Gaidoschik

0. Wiederholung eines dringenden Plädoyers

Was bereits in den Anregungen für die dritte Schulstufe festgehalten wurde, soll hier wiederholt werden – einfach deshalb, weil es so wichtig ist:

- Die schriftlichen Rechenverfahren (und hier im Speziellen das schriftliche Dividieren) werden im Unterricht an österreichischen Volksschulen heillos überbewertet. Die internationale Fachdidaktik der Grundschulmathematik argumentiert seit vielen Jahren dafür, das schriftliche Rechnen im Unterricht mit geringerem Zeitaufwand, vor allem mit wesentlich anderen Zielsetzungen zu behandeln. Nicht das schnelle Ermitteln von Rechenergebnissen soll im Vordergrund stehen (dafür gibt es – nicht erst seit vorgestern! – den Taschenrechner). Das vorrangige Ziel sollte vielmehr darin liegen, dass die Kinder die beim schriftlichen Rechnen angewandten Algorithmen verstehen (also die Abfolge immergleicher Verfahrensschritte, die derzeit von vielen Kindern rein mechanisch, ohne Weiß-Warum abgespult werden). Darüber hinaus sollte verstärkt am Stellenwert- und Größenverständnis (am "Zahlensinn") sowie an Techniken des überschlagenden Rechnens gearbeitet werden, damit die Kinder (später die Jugendlichen und Erwachsenen) ihrem Taschenrechner (einschließlich der durch Tippfehler entstandenen Resultate) nicht kritik- und hilflos ausgeliefert sind.
- Werden VolksschullehrerInnen mit diesem Plädoyer für eine andere Behandlung der schriftlichen Verfahren konfrontiert, reagieren Sie oft mit mehreren Jas und einem dicken Aber:
    - Ja, es wäre wichtiger, Verständnis zu erarbeiten.
    - Ja, für das Training der schriftlichen Division geht in der vierten Klasse viel Zeit drauf, die bei anderen Themen dann fehlt.
    - Ja, ich selbst löse schriftliche Divisionen auch lieber mit dem Taschenrechner.
    - **Aber**: SekundarschullehrerInnen (vor allem in der AHS) erwarten, dass die Kinder am Ende der Volksschule sicher und flott auch mit zweistelligem Divisor dividieren können!
- Erwarten sie das wirklich? Ich fürchte fast, dass es so ist. Aber wofür spricht das? Wenn die Einwände der Fachdidaktik gegen die derzeit vorherrschende Behandlung des schriftlichen Rechnens im Unterricht stimmen, dann darf sich doch nicht die Grundstufe den verfehlten Erwartungen der Sekundarstufe anpassen. Dann muss vielmehr für Grund- und Sekundarstufe gemeinsam überlegt werden, welchen Stellenwert das schriftliche Rechnen künftig in der Schule haben soll – und der Unterricht entsprechend umgestellt werden.
- Falls sich die eine oder andere Lehrerin, der eine oder andere Lehrer nun fragt: "Aber was soll ich dabei tun? Das sind doch alles Fragen für die Schulbehörde, die Lehrplankommission, für SchulbuchautorInnen?" - Ja, das ist wohl so. Wer aber selbst davon überzeugt ist, dass Änderungen, die über den eigenen Unterricht hinaus reichen, notwendig sind, der kann doch zumindest versuchen, auch andere in seinem Umfeld davon zu überzeugen. Und was auf jeden Fall möglich ist: Den eigenen Unterricht zu überprüfen und auszuloten, ob man sich innerhalb des derzeit vorgegebenen Rahmens nicht doch noch weiter vorwagen kann in Richtung einer anderen, sinnvolleren Gewichtung des schriftlichen Rechnens…
- Eltern, die diesen Beitrag lesen, um Anregungen für die häusliche "Nachhilfe" zu bekommen, mögen mir dieses "Vorwort" verzeihen: Sie haben ja tatsächlich keine

Wahl, als sich nach den Vorgaben der Schule zu richten; solange die Schule dem schriftlichen Dividieren einen so hohen Stellenwert gibt, wird eben auch zuhause oft die Notwendigkeit bestehen, Kinder dabei zu unterstützen, dieses Rechenverfahren in den Griff zu bekommen. Deshalb folgen ja auch gleich konkrete Ausführungen dazu, was helfen kann und was besser vermieden werden sollte. Aber vielleicht ist es manchen Eltern, die selbst nie auf die Idee kämen, eine Rechnung wie 42785 : 67 (wenn es schon sein muss!) anders als mit dem Taschenrechner auszurechnen, wenigstens ein kleiner Trost zu erfahren, dass es in der pädagogischen Wissenschaft keinesfalls unumstritten ist, Zehnjährigen solches abzuverlangen…

1. Die wichtigste Voraussetzung für sicheres Dividieren mit zweistelligem Divisor: *Verständnis* des Verfahrens mit einstelligem Divisor

Banal: Ein Kind, das nicht mit einstelligem Divisor (in Österreich Stoff der 3. Schulstufe) dividieren kann, kann es auch nicht mit zweistelligem Divisor (in Österreich Stoff der 4. Schulstufe).
Weniger banal und daher oft missachtet: Ein Kind, das durch einstelligen Divisor nach viel Übung zwar auf rein mechanische Weise schriftlich dividieren kann, aber keine Einsicht in die Verfahrensschritte hat, wird mit zweistelligem Divisor nur schwer (wenn überhaupt) zurechtkommen.
Dabei handelt es sich ja beim Dividieren durch einen zweistelligen Divisor gar nicht um ein neues Verfahren: Der Ablauf der Schritte, der Zusammenhang dieser Schritte mit einer Verteilungshandlung, die schriftliche Notation dieser Schritte – all das ist ganz genau so wie auch beim Dividieren mit einstelligem Divisor.
Der Unterschied besteht tatsächlich "nur" in der Größe der Zahlen, genauer: der "zweiten" Zahl (des "Divisors"): Diese ist zweistellig. Das macht (banaler Weise) natürlich alle Teilrechnungen aufwändiger. Vor allem aber führt dieser erhöhte Rechen- und Konzentrationsaufwand für die *Teilrechnungen* aber dazu, dass im Rahmen der *Gesamtrechung* einzelne Schritte, die beim Dividieren mit einstelligem Divisor bei vielen Kindern (nach einiger Übung) auch ohne Verständnis "automatisch" ablaufen, nun bewusste Planung erfordern würden. Wie aber planen ohne Einsicht in das Verfahren? So greifen nun mühsam eintrainierte "Sprüchlein" plötzlich ins Leere, einfach deshalb, weil das Zahlenmaterial ein anderes geworden ist – und mit den eingeübten Automatismen (kleines Einmaleins, Ergänzen über den nächsten Zehner) nicht mehr bewältigt werden kann.
Damit soll nicht behauptet werden, dass es gänzlich unmöglich wäre, auch das Dividieren mit zweistelligem Divisor ohne Verständnisgrundlage einzutrainieren. Aber das wäre in jedem Fall mit noch einmal viel mehr Aufwand verbunden als beim Dividieren mit einstelligem Divisor; es bliebe dauerhaft eine wackelige Angelegenheit mit hoher Fehleranfälligkeit; es bliebe angewiesen auf ständiges Training (die Pause von zwei Sommermonaten führt oft dazu, dass Kinder, die in der vierten Schulstufe über Monate hinweg das Dividieren üben mussten, zu Beginn der fünften Schulstufe nicht mehr wissen, wo sie bei einer Division überhaupt anfangen, geschweige denn weitermachen sollen); es wäre keine ausreichende Grundlage, um in der fünften Schulstufe auch durch Dezimalzahlen dividieren zu können; kurz: es wäre eine reichlich sinnlose Tortur mit geringen Erfolgschancen, die ich keinem Kind zumuten wollte.
Daher lautet der erste und wichtigste Rat für die Erarbeitung des Dividierens mit zweistelligem Divisor: Stellen Sie sicher, dass das Kind das Dividieren mit einstelligem Divisor nicht nur rechnerisch bewältigt, sondern auch verstanden hat, was es dabei in jedem einzelnen Schritt tut und was jeder einzelne Schritt mit dem Teilen einer Anzahl in gleich große Teilanzahlen zu tun hat. Anregungen dafür finden Sie im Beitrag zur dritten Schulstufe!

2. Weit vorausschauendes Arbeiten am überschlagenden Rechnen
"Aller Anfang ist schwer" gilt gerade auch beim schriftlichen Dividieren mit zweistelligem Divisor – und zwar dauerhaft, nicht nur für "AnfängerInnen" in dieser Rechenart. Denn am Anfang jeder Division (und jeder Teil-Division innerhalb einer Division…) steht das "Abschätzen". Ein beliebiges Beispiel:

42768 : 68 =
Wie beim Dividieren mit einstelligem Divisor gilt es zunächst, den Stellenwert des ersten Teilergebnisses zu bestimmen ("Hakerl"; zur Erläuterung siehe weiter unten):

4 2 7 6 8 : 6 8 =

Die erste Teil-Division lautet also

427 : 68 =

Doch wie zum Teufel soll man wissen, wie viel das ist? Da hilft (anders als beim Dividieren mit einstelligem Divisor) kein kleines Einmaleins! Zumindest nicht ohne zusätzliche Überlegungen…

Solche Überlegungen anzustellen, die dabei hilfreichen (Kopf-)Rechenfertigkeiten und -techniken zu erarbeiten: Damit sollten Sie beginnen, lange bevor Sie Kinder mit schriftlichen Divisionen mit zweistelligem Divisor konfrontieren. Je besser Kinder überschlagend dividieren (und multiplizieren) können, umso leichter wird ihnen das zweistellige Dividieren fallen; doch es bedarf einiger Zeit und Übung, um in diesen Bereichen sicher zu werden. Man kann – und soll! – damit bereits in der dritten Schulstufe beginnen. Das Gute daran: Das "überschlagende Rechnen", wie es als wesentliche Erleichterung auch beim schriftlichen Dividieren in der vierten Schulstufe hilfreich ist, ist gerade in Zeiten des Taschenrechners um vieles wichtiger als das schriftliche Dividieren selbst. Die Zeit, die Sie für das überschlagende Rechnen investieren, ist also in jedem Fall gut investierte Zeit!

Worum geht es dabei im Einzelnen?

2.1. Multiplizieren einer zweistelligen Zahl im Kopf
Kinder sollten im Kopf multiplizieren können – auch über das kleine Einmaleins hinaus. Das heißt nicht, dass auch das "Große Einmaleins" (Multiplikationen der Zahlen 1 bis 20 mit den Zahlen 1 bis 10) "auswendig gelernt" werden soll – ganz und gar nicht. Worum es geht, ist vielmehr: Das (hoffentlich bis zur dritten Klasse weitgehend automatisierte) kleine Einmaleins einerseits, Wissen um Rechengesetze andererseits dafür zu verwenden, auch zweistellige Zahlen im Kopf (zumindest näherungsweise) zu multiplizieren.

Die dafür nötigen Einsichten und daraus folgenden Rechenschritte, am Beispiel 4 · 23:

- Wenn ich 4mal je 23 nehmen soll, muss ich sowohl die 2 Zehner viermal nehmen als auch die 3 Einer.
- 4mal 2 Zehner ergibt 8 Zehner, also 80; das ist nicht schwerer zu rechnen als 4mal 2!
- 4mal 3 Einer ergibt 12 Einer; die muss ich zu den 80 noch dazugeben.
- Ergibt in Summe: 92! 4mal 23 ist also 92.

Für die Erarbeitung der *Einsicht* ist die Durchführung mit Rechenmaterial hilfreich: Das Kind nimmt viermal je 2 Zehnerstangen und 3 Einerwürfel; vorausgesetzt sind dabei Einsicht in die Multiplikationshandlung einerseits, in das Bündelungsprinzip (10 Einer = 1 Zehner, 10 Zehner = 1 Hunderter) andererseits.

Bezüglich der späteren *rechnerischen Durchführung* der Zehner-Rechnung (4mal 20 = 80) sei ausdrücklich davor gewarnt, es bei einem "Nullen-Trick" zu belassen ("einfach nur 4mal 2 rechnen und eine Null anhängen"): Anzustreben ist, dass Kindern bewusst ist, dass sie bei 4mal 20 eben mit Zehnern rechnen statt mit Einern; und dass *deshalb* das Ergebnis im Vergleich zur Einerrechnung *„um eine Stelle vorrückt“* = 10mal so viel ist. Die Grundvorstellung "eine Stelle vor" ist haltbar auch in der Sekundarstufe. Das unbedachte "Nullenanhängen" hingegen rächt sich, sobald Dezimalzahlen multipliziert werden: $3{,}5 \cdot 10 = 35$; Kinder, die bloß "Nullen anhängen" gelernt haben, rechnen aber gerne $3{,}5 \cdot 10 = 3{,}50$! Warum soll das "Nullenanhängen" auch plötzlich falsch sein?

Die rechnerische Durchführung steht aber zunächst im Hintergrund; erst einmal sollte der Ablauf der Schritte selbstverständlich werden. Das Aufschreiben dieser Schritte ist also nicht nur erlaubt, sondern sogar erwünscht, weil sich so leichter über diese Schrittfolge sprechen lässt. Auf welche Weise (und wie viel) aufgeschrieben wird, können und sollen Sie dem Bedarf der Kinder überlassen: Manche müssen sich gar nichts aufschreiben, andere zumindest am Anfang möglichst jeden Teilschritt, etwa auf diese Weise:

$$4 \cdot 23 \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 4 \cdot 20 = 80 \\ \\ 4 \cdot 3 = 12 \end{array}\right\} \; 4 \cdot 23 = 92$$

Erst wenn die Schrittfolge bei solchen Aufgaben außer Frage steht, sollte behutsam auf das Rechnen im Kopf (ohne Aufschreiben von Zwischenschritten) hingearbeitet werden. Beachten Sie dabei, dass die Schwierigkeiten je nach Zahlenmaterial sehr unterschiedlich sind: Kopfrechnerisch besonders anspruchsvoll wird es, wenn sich eine Hunderterüberschreitung ergibt, wie etwa bei $8 \cdot 67 = 480 + 56$.

In jedem Fall fordern diese Aufgaben eine differenzierte Behandlung:

- Jedes Kind sollte wissen, welche Schritte bei Aufgaben des Typs E · ZE zu machen sind, und den ersten Schritt (die Zehnerrechnung) auch im Kopf bewältigen. Das alleine genügt für halbwegs präzise Überschlagsrechnungen und hilft schon gewaltig beim schriftlichen Dividieren mit zweistelligem Divisor.
- Jedes Kind sollte imstande sein, solche Aufgaben mit Notieren der Zwischenergebnisse ("halbschriftlich") zu lösen.
- Die vollständige Durchführung aller Rechenschritte „im Kopf“ wird manchen Kindern aufgrund der geforderten hohen Merk- und Konzentrationsleistung nur mit hohem Übungsaufwand gelingen; dann ist zu prüfen, ob Aufwand und Ertrag in einem sinnvollen Verhältnis zu einander stehen. Fürs überschlagende Rechnen und schriftliche Dividieren ist es, wie gesagt, nicht unbedingt erforderlich, aber es ermöglicht natürlich präziseres Überschlagen und erleichtert dadurch das schriftliche Dividieren zusätzlich.

2.2. Dividieren von Zehnerzahlen durch Zehnerzahlen

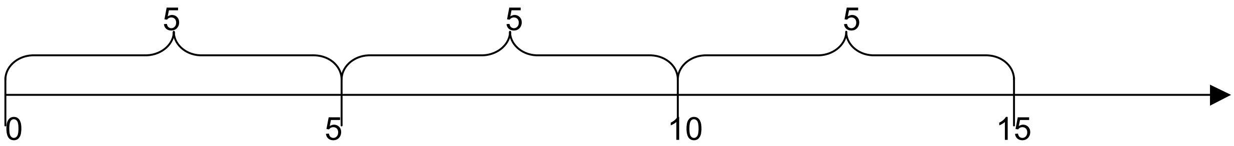
Schriftliches Dividieren durch zweistelligen Divisor erfordert Einsicht in folgenden mathematischen Zusammenhang:

15 : 5 = 3 ➔ 150 : 50 = 3 (später auch 1500 : 500 = 3 etc.)

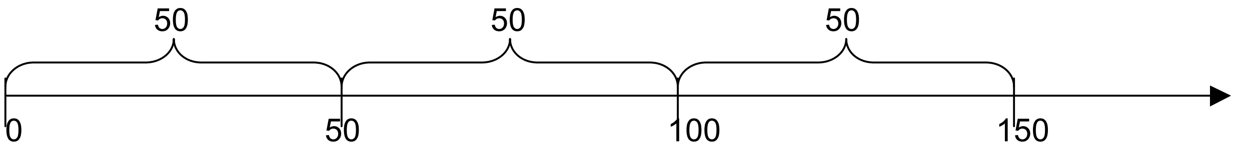
Diese Einsicht erfolgt wohl leichter über den Aspekt des Enthaltenseins als über jenen des Verteilens (vgl. den Beitrag zur dritten Schulstufe, Kapitel 1) "Verständnis des Dividierens sowohl als Verteilen wie auch als Enthaltensein").

Wenn Sie mit Kindern diesen Aspekt (wie im Beitrag zur dritten Schulstufe empfohlen) am Zahlenstrahl erarbeitet haben, ist eine Übertragung auf Zehnerzahlen unschwer anzubahnen:

15 : 5 als "Enthaltensein" am Zahlenstrahl:



150 : 50 als "Enthaltensein" am Zahlenstrahl:



2.3. Überschlagendes Dividieren durch zweistellige Zahlen

Das benötigt, über das oben Besprochene hinaus, zusätzlich ein solides Verständnis für das Runden von Zahlen:

$$150 : 50 = 3 \Leftrightarrow \overset{\approx 150}{153} : \overset{\approx 50}{49} \approx 3$$

Auch hier kann der Zahlenstrahl in der Erarbeitung gute Dienste erweisen (vgl. wieder den Beitrag zur dritten Schulstufe):

- Für einen Streifen der Länge 49 wird am 1000er-Zahlenstrahl Maß genommen.
- Frage: Wie oft passt dieser Streifen in die Strecke der Länge 153?
- Die Antwort kann durch wiederholtes Anlegen ermittelt werden; dabei wird auch deutlich, dass noch ein Rest bleibt. Wie groß dieser Rest ist, muss vorerst nicht interessieren (siehe 2.4.).
- Interessant aber der Vergleich: Wie oft passt der Streifen der Länge 50 (also jener Zehnerzahl, auf welche die Zahl 49 gerundet wird) in dieselbe Strecke mit der Länge 153? Erkenntnis: Genau so oft, also wieder 3mal. Für eine erste Schätzung des „Wie oft?“ genügt es also, mit der runden Zehnerzahl zu rechnen. Vorteil: Das lässt sich auch im Kopf machen!
- In weiterer Folge sollte darauf hingearbeitet werden, solche Einschätzungen (durch Runden) auch „im Kopf“ vorzunehmen, Beispiel: Wie oft ist 48 in 312 enthalten?

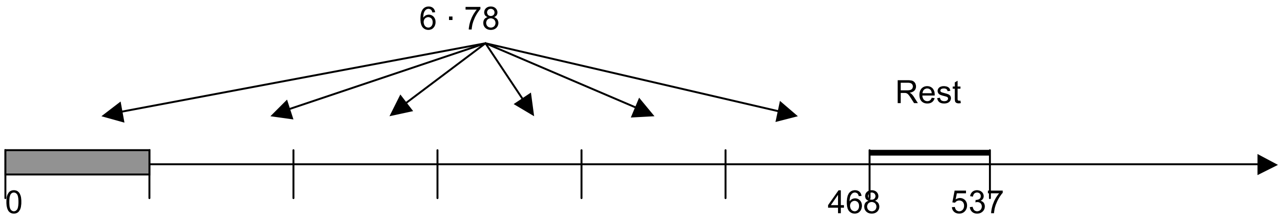
Lösung: 48 ist ungefähr 50. 50 ist in 312 so oft enthalten wie 5 in 31, also 6mal; daher wird auch das Ergebnis von 312 : 48 wahrscheinlich 6 sein; dabei wird wahrscheinlich ein Rest bleiben.

2.4. Rest-Ermittlung bei Divisionen durch zweistellige Zahlen

Wenn einmal grundsätzlich klar ist, wie beispielsweise 537 : 78 durch Messen am Zahlenstrahl, aber auch durch überschlagendes Rechnen im Kopf ermittelt werden kann (siehe 2.3.), kann die weiterführende Frage gestellt werden: Wie groß ist der Rest, der bei diesem Mess-Vorgang bleibt?

Wieder hilft der Zahlenstrahl beim Erarbeiten der nötigen Schrittfolge:

537 : 78 ?



1. Schritt: 78er-Streifen immer wieder anlegen. Geht 6mal.

2. Schritt: Wo "lande" ich dabei genau? ➔ $\underline{78 \cdot 6}$
468

3. Schritt: Wie berechne ich den Rest? ➔ 537
$\underline{-\ \ 468}$
69 Rest

- Diese 3 Schritte vorerst auch als 3 getrennte Rechnungen anschreiben lassen:

1) $537 : \overset{\approx 80}{78} \approx 6$ 2) $\underline{78 \cdot 6}$ 468 3) 537 $-\ \underline{468}$ 69 Rest!

- Dann auf eine verkürzte Schreibweise hinarbeiten:

$537 : \overset{\approx 80}{78} = 6$
$-\ \underline{468}$
69 R.

Ich empfehle hier unbedingt eine "ausführliche" Schreibweise, bei der zunächst die Multiplikation und in einem nächsten Schritt auch die abschließende Subtraktion schriftlich gerechnet werden. Zur Erläuterung siehe den Beitrag über die dritte Schulstufe sowie weiter unten.)

- Wir sind auf diese Weise natürlich schon bei einer schriftlichen Division gelandet – genauer: Bei einer Spezialform der schriftlichen Division. Das Ergebnis ist hier einstellig, daher treten keine Probleme mit Stellenbestimmung, "nächste Stelle … herab" etc. auf. Aber jede Division, und sei die zu dividierende Zahl noch so groß, setzt sich letztlich aus solchen "Bausteinen" zusammen.

Es empfiehlt sich daher, die Kinder erst einmal anhand solcher einzelner "Bausteine" Sicherheit im Einschätzen und Restermitteln gewinnen zu lassen; wenn das gelingt, ist das noch Fehlende zumeist nicht schwer zu erarbeiten bzw. nur noch eine Übertragung vom (hoffentlich verstandenen!) Dividieren mit einstelligem Divisor.

3. Hilfen bei der Übertragung des Algorithmus auf zweistellige Divisoren

Wie unter 1. ausgeführt: Der höchst komplexe Ablauf von Schritten beim Dividieren mit zweistelligem Divisor ist dann schwer bis unmöglich zu erlernen, wenn das Dividieren mit einstelligem Divisor nicht hinreichend klar ist. Umgekehrt hilft die Einsicht beim Dividieren mit einstelligem Divisor dabei, auch das Dividieren mit zweistelligem Divisor in den Griff zu bekommen.

Den Algorithmus mit zweistelligem Divisor mit Material zu erarbeiten (wie für einstelligen Divisor dringend empfohlen, siehe den Beitrag zum dritten Schuljahr), ist kaum praktikabel; bei einer Aufgabe wie 4238 : 38 müsste ich dafür 4 Tausenderwürfel, 2 Hunderterplatten, 3 Zehnerstangen und 8 Einerwürfel auf 38 gleich große Portionen verteilen, unzählige Male tauschen – ein höchst mühsames Unterfangen. Es wird aber auch gar nicht nötig sein, wenn schon das Dividieren mit einstelligem Divisor mit Material sorgfältig erarbeitet wurde: Es geht dann nur noch darum, die mit einstelligem Divisor verstandenen Schritte auf das größere Zahlenmaterial zu übertragen. Dabei helfen kann gerade das parallele Durchführen zweier Rechnungen (von denen die eine, jene mit einstelligem Divisor, unschwer auch wieder mit Material durchgeführt werden kann).

Ein beliebiges Beispiel: Zwei Aufgaben sollen Schritt für Schritt parallel zu einander berechnet werden, nämlich

2 1 3 : 4 = 2 1 3 1 : 3 9 =

3.1. Klärung der Frage, was zu tun ist

In beiden Fällen soll eine Anzahl auf gleiche Portionen aufgeteilt werden. Ein Sachbezug (Euro) erleichtert die Vorstellung: In dem einen Fall sind da 213 Euro, die zu gleichen Teilen auf 4 Kinder aufgeteilt werden. Im anderen Fall sind es 2131 Euro, die auf 39 Kinder gerecht verteilt werden.

Für die Material-Durchführung der "kleinen" Rechnung heißt das: Wir haben 2 Hundert-Euro-(Spielgeld)-Scheine, 1 Zehner-Schein, 3 Einer-Münzen und wollen diesen Betrag auf 4 Kinder aufteilen.

Für die "große" Rechnung sollte an das (hoffentlich bereits erarbeitete!) Stellenwert-Verständnis der Kinder angeknüpft werden: 2131 bedeutet 2 Tausender, 1 Hunderter, 3 Zehner, 1 Einer. Nun gibt es (seit Einführung des Euro) keine Tausenderscheine; um die Aufgabe mit Geld so nachzuspielen, wie es unsere Stellenschreibweise vorgibt, müssen wir also aus je zehn Hunderterscheinen ein Tausender-Päckchen oder –Bündel machen. Wir sprechen im Folgenden also von Tausender-Bündeln.

3.2. Wie beginnen?

Beim Erarbeiten des Dividierens mit einstelligem Divisor (siehe Beitrag zum dritten Schuljahr) wurde bereits geklärt, dass und warum es beim Dividieren sinnvoll ist, mit der größten Stelle zu beginnen.

Für die "kleine Rechnung" heißt das: 2 Hunderter sollen auf vier Kinder aufgeteilt werden; 2 Geldscheine kann ich nicht auf vier Kinder aufteilen, ich muss also die Hunderter in Zehner tauschen, ergibt 20 Zehner; zusammen mit dem einen an der Z-Stelle notierten Zehner sind also im ersten Schritt 21 Zehner vorhanden, die auf die vier Kinder verteilt werden müssen; das mache ich mit einem "Hakerl" an der Zehner-Stelle kenntlich, zugleich weiß ich, dass im Ergebnis zunächst Zehner (und daher nachher noch die Einer) ermittelt werden müssen.

Bei der "großen" Rechnung gehe ich ganz analog vor: Ich habe 2 Tausender-Bündel, die ich auf 39 Kinder aufteilen soll – viel zu wenige Bündel für so viele Kinder! Also löse ich die Tausender-Bündel auf und erhalte so 20 Hunderter-Scheine, ergibt zusammen mit dem 1 auf der Hunderterstelle notierten Hunderter insgesamt 21 Hunderter – immer noch viel zu wenig Scheine für 39 Kinder! Also noch einmal tauschen: 21 Hunderter ergeben 210 Zehner; dazu die 3 an der Zehnerstelle notierten Zehner, macht 213 Zehner für 39 Kinder – das lässt sich verteilen, also "Hakerl" an der Zehnerstelle samt Bestimmung der Stellen im Ergebnis:

$\overline{2\ 1}|3 : 4 \quad = . .$ $\qquad\qquad$ $2\ \overline{1\ 3}|1 : 3\ 9 \quad = . .$

All das ist aus der Verteilhandlung heraus leicht zu verstehen – und kann ja an der "kleinen Rechnung" mit Material auch tatsächlich handelnd gelöst werden. Ein Kind, das diese Handlung und damit das "Hakerl" in der kleinen Rechnung entsprechend versteht, wird dieses Verständnis auch auf die "große Rechnung" übertragen können – selbst dann, wenn diese nicht auch mit Material Schritt für Schritt durchgeführt wird. Gerade das parallele Rechnen und schrittweise Vergleichen der beiden Rechnungen hilft dabei, diese Übertragungsleistung zu schaffen. So auch bei den folgenden Schritten:

3.3. Erste Verteil-Handlung

Ich muss also bei der "kleinen Rechnung" 21 Zehner an 4 Kinder verteilen, bei der "großen Rechnung" sind es 213 Zehner für 39 Kinder.

21 : 4 ist rechnerisch nicht schwer, wenn das Kind das kleine Einmaleins kann.

213 : 39 ist schwerer, aber lösbar, wenn die oben beschriebenen Erarbeitungsschritte erfolgreich begangen wurden.

In jedem Fall geht es um die bereits oben (2.4.) erläuterten drei Schritte, die in der "ausführlichen Schreibweise" (wie bereits erarbeitet) notiert werden sollen:

$$\begin{array}{l} \overline{2\ 1}|3 : 4 \quad = 5\ . \\ \underline{2\ 0} \\ \ \ 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 2\ \overline{1\ 3}|1 : 3\ 9 \quad = 5\ . \\ \underline{1\ 9\ 5} \\ \ \ 1\ 8 \end{array}$$

Am Ende der ersten Verteilrunde (die Zehner wurden verteilt) bleibt also bei der "kleinen Rechnung" 1 Zehner übrig, bei der "großen Rechnung" sind es 18 Zehner, die noch nicht verteilt wurden.

3.4. Zweite Verteilhandlung

Was geschieht mit diesem Rest? Zehner lassen sich in Einer umtauschen, also kann ich mit dem Verteilen weitermachen.

Bei der "kleinen Rechnung" werden aus dem 1 Rest-Zehner 10 Einer, ergibt in Summe 13 Einer für die (abschließende) zweite Verteilhandlung. Diesem Tauschen des Rest-Zehners und Dazugeben der 3 Einer entspricht das "nächste Stelle 3 herab".

Bei der "großen Rechnung" wieder ganz analog: Die 18 Rest-Zehner werden zu 180 Einern umgetauscht, ergibt in Summe 181 Einer für die zweite Verteilungsrunde ("nächste Stelle 1 herab"):

```
2 1 3 : 4   = 5 .            2 1 3 1 : 3 9   = 5 .
2 0                          1 9 5
  1 3                          1 8 1
```

Die Einer-Divisionen werden in der gewohnten Weise durchgeführt und aufgeschrieben:

```
2 1 3 : 4   = 5 3            2 1 3 1 : 3 9   = 5 4
2 0                          1 9 5
  1 3                          1 8 1
  1 2                          1 5 6
    1 Rest                       2 5 Rest
```

Aber was geschieht jetzt mit dem Rest? In der Volksschule wird diese Frage wohl oft nicht gestellt – was bedauerlich ist, denn es ist eine berechtigte, auch mathematisch spannende Frage. Gerade bei Erarbeitung mit Geld liegt es nahe, auch die Einer weiter zu tauschen (in Cent) und mit dem Verteilen weiterzumachen – so gelangt man zu Dezimalzahlen… Aber es könnte ja auch darum gehen, 213 Kinder auf vier gleich große Gruppen aufzuteilen – was ist dann mit dem 1 Kind, das als "Rest" bleibt? Solche Fragen sollten jedenfalls thematisiert werden! Aber wenn's nur um die Durchführung der schriftlichen Division geht, dann ist die auf "Volksschul-Niveau" nun glücklich (mit Rest) zu einem Ende gekommen…

4. Nochmals, weil es so wichtig ist: Ein Plädoyer für die "ausführliche Schreibweise"
Die schon für das Dividieren mit einstelligem Divisor angeführten Argumente für das „ausführliche Aufschreiben“ gelten bei zweistelligem Divisor verstärkt. Die Vorteile kommen in besonderer Weise zum Tragen, wenn – was kaum vermeidbar ist – ein Schätzfehler passiert.

Zur Verdeutlichung ein Vergleich: Was passiert bei einem Schätzfehler bei ausführlicher Schreibweise?

```
4 2 0 6  :  6 3 = 7 .
4 4 1
```

Was ist hier passiert? Nun, das Kind hat sich verschätzt, hat „einmal zu oft“ genommen; das kann gerade bei diesen Zahlen leicht passieren.
Im nächsten Schritt wird nun aber, der ausführlichen Schreibweise gemäß, 7 mal 63 schriftlich gerechnet und das Ergebnis 441 gleich unter die 420 Zehner geschrieben.
Was bedeuten diese Zahlen? Nun, das Ergebnis der Multiplikation gibt an, wie viel (in diesem Fall von den Zehnern) tatsächlich verteilt wurden; im nächsten Schritt soll dann der Rest auf die insgesamt zu verteilenden Zehner ermittelt werden.
Nun ergibt sich aber, dass 441 Zehner verteilt wurden – obwohl nur 420 Zehner zum Verteilen vorhanden waren!

Es ist (bei richtigem Verständnis der aufgeschriebenen Zahlen) also offensichtlich, dass ein Schätzfehler passiert sein muss – und auch klar, wie der zu korrigieren ist: Das Teilergebnis 7 für die Zehnerstelle ist zu hoch, tatsächlich können es nur 6 Zehner sein, die jeder beim Verteilen bekommt.

Die ausführliche Schreibweise kann also Schätzfehler natürlich nicht verhindern; und sie garantiert auch nicht, dass Fehler entdeckt werden – dafür muss schon einiges an Verständnis für das Verfahren vorhanden sein. Aber wenn dieses Verständnis da ist, dann macht die ausführliche Schreibweise Fehler transparent – einfach dadurch, dass jeder Schritt der Verteilungshandlung (damit jeder Schritt, bei dem ein Fehler passieren kann) auch seine Entsprechung auf dem Papier hat.

Anders bei verknappter Schreibweise:

```
4 2 0 6  :  6 3 = 7 .
  7 9
```

Derselbe Schätzfehler. Aber was ist im Beispielfall danach passiert? Ganz einfach: Das Kind ist beim „Einmultiplizieren“ (der verknappten Schreibweise gemäß) Stelle für Stelle vorgegangen und hat wie folgt dabei gedacht:

7 mal 3 = 21, und wie viel ist 30?
9 an, 3 merken.
7 mal 6 ist 42, und 3 = 45, und wie viel ist 52? Und 7!

Bei dieser Schreibweise wird das Multiplizieren und Ergänzen *Stelle für Stelle getrennt* im Kopf gelöst, das Produkt der Multiplikation (7 mal 63 = 441) wird also gar nicht festgehalten (weder gedanklich noch auf dem Papier). Nun wird aber bei der Restermittlung Stelle für Stelle immer wieder verlangt, sich die Zehnerstelle für das Ergänzen passend selbst dazu zu denken: Das Kind rechnet "7mal 3 ist 21", sieht die 0 von 420 und denkt sich selbst "30" als die passende Zahl, auf die von 21 zu ergänzen ist. Anders lässt sich mit "verknappter Schreibweise" auch gar nicht rechnen. Bei der nächsten Teilmultiplikation heißt es dann: 7 mal 6 = 42, und 3 ist 45. Das Kind im Beispiel macht nun dasselbe wie zuvor: Es sieht die 2 an der nun bearbeiteten (Hunderter-)Stelle – und ergänzt sich den Zehner so, dass eine Ergänzung überhaupt erst möglich wird: "45 und wie viel ist 52?" Das ist nun tatsächlich ein Fehler (es dürfte nur auf 42 ergänzt werden). Aber wie soll man das verstehen, wenn man darauf trainiert wurde ist, die Zehnerstelle "passend" zu ergänzen – ohne zu wissen, was das alles mit einer Verteilhandlung zu tun hat?

Das kleine Beispiel soll verdeutlichen, dass die Vorteile der ausführlichen Schreibweise nicht nur darin liegen, dass sie den Kopfrechenaufwand (und damit den Konzentrationsaufwand) erheblich reduziert. Aber das tut sie natürlich auch – weshalb auch in fast allen Ländern Europas für das schriftliche Dividieren "ausführliche Schreibweisen" (in der einen oder anderen Variante) üblich sind. Warum macht man es österreichischen Kindern schwerer? Der Lehrplan hindert jedenfalls keine Lehrerin, keinen Lehrer, es anders zu machen; und ich habe von LehrerInnen, die es "gewagt" haben, mit ihren Kindern die "ausführliche Schreibweise" zu erarbeiten, bisher ausnahmslos positive Rückmeldungen bekommen…

5. Sorgfältige Auswahl des Zahlenmaterials in der Erarbeitung

Schriftliches Dividieren mit zweistelligem Divisor ist schwer; aber die Schwierigkeiten sind je nach Anzahl der zu bearbeitenden Stellen und je nach Einerstelle des Divisors höchst unterschiedlich. Dies sollte in der Erarbeitung beachtet werden – stärker, als dies in manchen Schulbüchern getan wird (manche sind darin recht sorgfältig); und teilweise anders, als es üblicherweise geschieht.

Üblicherweise erfolgt der Einstieg in das Thema nämlich über das Dividieren durch „reine Zehner", also etwa mit Rechnungen wie 5340 : 60 oder dergleichen. Natürlich ist das rechnerisch der einfachste Fall – aber gerade deshalb nicht geeignet, um Kindern eine vernünftige "Schätztechnik" zu vermitteln. Denn beim Dividieren durch reine Zehner funktioniert ja ein einfacher Trick: "hinten zuhalten". Aus 534 : 60 (erste Teildivision in 5340 : 60) wird so 53 : 6, und das lässt sich mit kleinem Einmaleins unschwer bewältigen.

Das Problem dabei: "Hinten zuhalten" ist (auch wenn es bei manchen Zahlen so scheint) nicht dasselbe wie das oben empfohlenen "Rechnen mit gerundeten Zahlen". Zwei Beispiele zur Verdeutlichung:

- Bei 534 : 59 führt "hinten zuhalten" zu 53 : 5 = 10mal; tatsächlich ist 59 in 523 aber nur 8mal enthalten, was ein rundend-überschlagendes Kind über den Gedanken "etwa 60 in 523" unschwer richtig ermitteln wird.
- Bei 361 : 42 führt "hinten zuhalten" über 36 : 4 zum Ergebnis 9; ein runden-überschlagendes Kind kann (siehe unten) lernen, dass zwar 40 in 361 ziemlich genau 9mal enthalten ist (9 mal 40 ist ja 360), aber 42 (weil mehr als 40) sich nicht ganz 9mal, also nur 8mal ausgehen kann.

"Hinten zuhalten" ist also *keine* Erfolg versprechende Technik; Erwachsene sollten sich hüten, Kindern einen solchen "Tipp" zu geben. Und wenn Kinder selbst auf diesen "Trick" verfallen, sollte man sich bemühen, ihnen bessere Techniken verständlich zu machen. Aber all das wird erschwert, wenn Kinder anfangs nur mit Divisionen konfrontiert werden, die diesen "Trick" zu bestätigen scheinen. Darum nochmals: Wer Kindern zu guten Schätztechniken verhelfen möchte, sollte sich den (leichten) Spezialfall „Dividieren durch reine Zehner" eher für den Schluss aufheben, als damit zu beginnen; jedenfalls sollte er nicht über längere Zeit nur solche Spezialfälle der Division behandeln.

5.1. Einstieg mit Divisoren wie 49, 58, 39, 68 …

Eher empfiehlt es sich, anfangs Divisionen mit solchen Divisoren zu behandeln, die an der E-Stelle eine 9 oder 8 haben. Denn solche Divisoren (wie in 3158 : 58) fordern von Beginn an ein Denken mit „runden Zahlen"; zugleich führt hier das Runden in der Regel aber auch zu richtigen Schätzergebnissen (weil die Abweichung von gerundeter Zahl und „wirklichem Divisor" gering ist). Wenigstens am Anfang bleibt also Frust erspart, sofern man richtig rundet.

5.2. Den Umgang mit Schätzfehlern lernen mit Divisoren wie 41, 52, 61, 72…

In weiterer Folge könnten dann Divisoren behandelt werden, die eine 1 oder 2 an der E-Stelle haben. Hier lassen sich dann bald auch Schätzfehler „provozieren" – und das ist *sinnvoll* im Zuge des Lernprozesses: Schließlich soll der Umgang mit solchen Fehlern (die sich kaum vollständig vermeiden lassen; s. u.) gelernt werden.

Ein Beispiel:
Bei 253 : 52 führt korrektes Runden des Divisors auf 253 : 50, also zum Schätzergebnis 5. Die Multiplikation 5 mal 52 macht aber deutlich, dass 52 tatsächlich nur 4mal in 253 enthalten ist. Gerade dadurch, dass Kinder (nachdem sie grundsätzlich Sicherheit im Umgang auch mit zweistelligem Divisor erlangt haben) mit solchen tückischen Aufgaben konfrontiert werden (und dabei wohl auch den einen oder anderen Schätzfehler machen), können sie lernen

1) wie man erstens mit solchen Fehlern umgehen sollte:
    - Man sollte sie erkennen (indem man im nächsten Schritt 52mal 5 = 260 rechnet und daran denkt, dass aber nur 253 zum Verteilen da sind).
    - Man sollte sich nicht weiter darüber ärgern – solche Fehler passieren auch geübten Rechnern!
    - Man sollte die Schätzung korrigieren, was nun aber einfach ist, wenn man verstanden hat, worum es geht: Da 5 mal 52 260 ergibt, also zu viel, kann 253 : 52 nur 4 ergeben, freilich mit recht großem Rest.
2) wie man solche Fehler vielleicht sogar vermeiden kann:
    - An Schätzfehlern wie 253 : 52 = 4??? lässt sich eine wichtige Einsicht gewinnen („aus Fehlern lernen“!): Überschlagendes Rechnen mit runden Zahlen ist nützlich, aber eben nicht die "exakte Rechnung"; Abweichungen zwischen dem „Wie oft?“ der gerundete Zahl und dem Ergebnis der „exakten Rechnung“ sind möglich. Also empfiehlt es sich, nach dem überschlagenden Rechnen immer noch einen Gedanken (und vielleicht die eine oder andere Kopfrechnung) darauf zu verwenden, ob die "exakte Rechnung" vielleicht vom Schätzergebnis abweichen könnte und wenn ja, in welcher Weise. Mehr dazu weiter unten!

5.3. Schwierig: Divisionen wie 53, 67, 24, 36
Bei Divisoren, die an der Einerstelle eine 2 oder gar 3 bzw. eine 7 oder gar 6 haben, kann es besonders leicht zu Schätzfehlern kommen, bedingt durch den relativ großen Unterschied der beim Schätzen verwendeten gerundeten Zahl und dem tatsächlichen Divisor.

Wie damit umgehen? Ich denke: Je nach Fähigkeit (und Bereitschaft) der Kinder, zusätzliche Überlegungen und Kopfrechnungen anzustellen.

Wieder ein Beispiel, um das Prinzip deutlich zu machen:

4138 : 56 = ?

Wenn ich hier runde, komme ich für die erste Teilrechnung auf 413 : 60, was 6 ergibt. Wenn ich nun mit 6 die weiteren Schritte der schriftlichen Division durchführe, ergibt sich das Folgende:

4138 : 56 = 6 .   ???
336
 77

Hier spätestens sollte jedem Kind deutlich werden, dass ein Schätzfehler passiert ist: 77 Z bleiben Rest – wo ich doch auf 56 Portionen aufteile! Dann kann ich aber den Rest auch noch aufteilen, sodass sich also pro Portion nicht 6, sondern 7 ergeben muss!

Diesen souveränen Umgang mit einem Schätzfehler sollte jedes Kind erlernen; bei Einsicht in das Verfahren (Was tue ich überhaupt? Was bedeuten die Zahlen, die da auf dem Papier stehen?) kann das erfahrungsgemäß auch mit jedem Kind erreicht werden.

Aber lässt sich auch vermeiden, dass solche Schätzfehler überhaupt passieren?

Grundsätzlich natürlich schon. Im Beispiel 413 : 56 wäre ungefähr folgende Überlegung gefordert:

„60 ist in 413 6mal enthalten; 56 ist aber weniger als 60, könnte also auch 7mal enthalten sein (zu dieser Logik weiter unten mehr!). Ich probiere es einfach im Kopf aus: 7mal 56 = 350 + 36, also 386 – ja, geht sich aus!“

Gefragt wäre also ein kritischer Vergleich der Überschlagsrechnung mit der „exakten Rechnung“ – und einiges an Kopfrechenfertigkeit.

(Natürlich kann ich die „Kontroll-Multiplikation“ 7mal 56 auch als schriftliche Nebenrechnung durchführen; aber dann stellt sich die Frage nach Aufwand und Ertrag: Wenn ich ohnedies eine zusätzliche schriftliche „Neben-Rechnung“ benötige, warum nicht gleich in der „Haupt-Rechnung“ rechnen – und im Falle eines Fehlers eben zum Radiergummi oder Tinten-Killer greifen?)

Ob nun jedes Kind beim schriftlichen Dividieren so viel Kopfrechenfertigkeit aufbringen kann (und will)? Wie gesagt: Ich denke, hier sollte in Unterricht und Förderung individualisiert werden.

Dazu gehört,

- dass man mit allen Kindern daran arbeitet, dass sie solide Schätztechniken erwerben, aber auch bedenkt, dass das Schätzergebnis (je nach Zahlenmaterial) daneben liegen kann, weshalb Vorsicht geboten ist und mitunter eben Fehler korrigiert werden müssen;
- dass man allen Kindern auch „verfeinerte Schätztechniken“ anbietet, die (siehe Beispiel) freilich einigen Kopfrechen- und Denkaufwand erfordern – und deshalb vielleicht nicht von allen Kindern (sicher aber von vielen) dankbar aufgegriffen werden.

Was meine ich mit „allen Kindern verfeinerte Schätztechniken anbieten“? Nun: Fälle wie das oben erläuterte 413 : 56 sollten im Unterricht (bzw. in der Förderung) zum Anlass genommen werden, um über die Abweichung von Schätzrechnung und exakter Rechnung zu diskutieren und nachzudenken. Dabei stößt man auf folgende Logik:

  - Wenn man durch eine Zahl mit 6 oder 7 an der E-Stelle dividiert, kann es leicht passieren, dass diese Zahl öfter reinpasst, als es sich beim Schätzen mit der runden Zahl ergeben hat. Denn die „wirkliche“ Zahl ist ja um einiges kleiner als die runde Zahl; eine kleinere Zahl passt aber vielleicht öfter hinein.
  - Genau das Umgekehrte gilt, wenn ich durch eine Zahl mit 3 oder 4 an der E-Stelle dividiere.
  - Dieses Prinzip „kleinere Zahl passt öfter, größere weniger oft hinein“ lässt sich mit Material erarbeiten: Tischkante einmal mit kürzerem = kleinerem, dann mit längerem = größerem Bleistift abmessen, welcher passt öfter rein?

> Dieser Gedanke der „umgekehrten Proportionalität“ ist mathematisch wertvoll – im Gegensatz zum bloßen Abarbeiten von Übungsseiten voller schriftlicher Divisionen…

Wie gesagt: Solche Gedanken (und daraus abgeleitete Techniken) sollten meines Erachtens im Unterricht wie auch in der Förderung Thema sein; ob ein jedes Kind sie beim schriftlichen Dividieren auch aufgreifen will (und dank Kopfrechenfertigkeit auch kann), ist eine andere Frage; manche werden es gerne tun, weil sie merken, dass man sich auf diesem Weg doch einiges an Radierarbeit sparen kann …

5.4. Divisoren mit 5 an der E-Stelle

Bei Divisionen durch 15, 25, 35 usw. ist der Überschlag durch Runden wenig effizient (weil ja die Abweichung der gerundeten Zahl von der exakten Zahl am denkbar größten ist). Hier bietet sich eine andere Technik an:

Von 15, 25, 35 … lässt sich relativ leicht das Doppelte, Vierfache, Sechsfache, Achtfache errechnen:

15 mal 2 =	30	verdoppeln
15 mal 4 =	60	+ 30
15 mal 6 =	90	+ 30
15 mal 8 =	120	+ 30

Wenn nun z.B. die Division lautet

118 : 15

so könnte durch Vergleich mit 8mal 15 = 120 das Ergebnis 118 : 15 = 7 leicht ermittelt werden. Dafür muss *nicht* die 15er-Reihe auswendig gelernt werden; das Kind müsste aber die geraden Zahle der 15er-Reihe rasch und sicher errechnen können. Wenn das im Kopf zu schwer ist, wäre auch denkbar, dass das Kind sich *vor* Start einer Division durch 15 die Liste mit 2mal/4mal/6mal/8mal (wie oben vorgemacht) als Nebenrechnung an den Rand schreibt und im weiteren Verlauf der Division als Hilfe verwendet.

6. Schlussbemerkung

So viele Zeilen zum schriftlichen Dividieren … da besteht die Gefahr, dass vor lauter Bäumen der Wald aus dem Blickfeld gerät. Daher noch einmal, zur Einordnung des Ganzen: Schriftliches Dividieren mit zweistelligem Divisor ist schwer und verlangt deshalb überaus sorgfältige methodisch-didaktische Überlegungen. Der Beitrag ist deshalb zwangsläufig recht umfangreich geraten. Dieser Umfang möge bitte nicht so interpretiert werden, als ob ich das schriftliche Dividieren mit zweistelligem Divisor für etwas unglaublich Wichtiges hielte; das tue ich nicht. Aber wenn und solange VierklässlerInnen abverlangt wird, dass sie dieses Verfahren erlernen, dann sollten sie auch fachdidaktisch bestmöglich dabei unterstützt werden. Wenn dieser Beitrag dabei ein wenig helfen kann, hat er sein Ziel erreicht.

7. Weiterführende Literatur

Abele, A. / Kalmbach, H. und andere (1994): Handbuch zur Grundschulmathematik, 3. und 4. Schuljahr. Stuttgart: Klett

Gaidoschik, M. (2002): Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Wien: öbv-htp

Krauthausen, G./Scherer, P. (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg – Berlin: Spektrum.

Lorenz, J.H./Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematik-Unterricht. Schroedel-Verlag, Hannover.

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. Heidelberg: Spektrum.

Radatz, H./Schipper, W., Ebeling, A./Dröge, R. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht, 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Schipper, W., Ebeling, A./Dröge, R. (2000): Handbuch für den Mathematikunterricht, 4. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Wittmann, E. Ch. / Müller, G. N. (1994): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett.